

Regelungstechnik I

Nicolas Lanzetti
lnicolas@student.ethz.ch

Vorwort

Dieses Skript wurde unter Verwendung des Buches *Analysis and Synthesis of Single-Input-Single-Output Control System* von Prof. Lino Guzzella und des zu Verfügung gestellten Materials der Vorlesung Regelungstechnik I (HS 2014) verfasst.

Es dient der Möglichkeit, den Stoff der Vorlesung zu wiederholen. Für ein tieferes Verständnis verweise ich jedoch auf das Studium des oben zitierten Buches.

Ich kann weder Vollständigkeit noch Korrektheit des Skriptes garantieren: kleine Fehler können enthalten sein.

Deshalb bin ich dankbar, wenn mir Fehler gemeldet werden, so dass ich sie korrigieren kann. Für Verbesserungsvorschläge bin ich natürlich auch offen.

Ich möchte mich bei allen Personen, die mir bei der Erstellung dieses Skriptes geholfen haben, bedanken.

Ich wünsche euch viel Spass mit Regelungstechnik I!

24. September 2017

Nicolas Lanzetti, nicolas@student.ethz.ch

Inhaltsverzeichnis

1	Regelungstechnik und Systeme	5
1.1	Definitionen	5
1.2	Eigenschaften von Systemen	5
1.3	Schaltung von Systemen	5
1.4	Weitere Grössen	6
1.5	Ziele der Regelungstechnik	6
2	Modellierung eines dynamischen Systems	6
2.1	Allgemeines Vorgehen für die Modellierung	6
2.2	Gleichgewicht	7
2.3	Normieren	7
2.4	Linearisierung	7
2.5	Signalflussbild	8
3	Analyse linearer Systeme	8
3.1	Allgemeine Lösung der Modellgleichung	8
3.2	Lyapunov Stabilität	9
3.3	Steuerbarkeit	9
3.4	Beobachtbarkeit	9
3.5	Stabilisierbarkeit	10
3.6	I/O-Beschreibung eines Systems	10
4	Frequenzbereich	10
4.1	Laplace Transformation	10
4.1.1	Eigenschaften der Laplace Transformation	11
4.1.2	Laplace-Transformation von einigen Funktionen	11
4.2	Übertragungsfunktion	11
4.2.1	Zustandsraumdarstellung	11
4.2.2	I/O Darstellung	12
4.2.3	Eigenschaften der Übertragungsfunktion	12
4.2.4	Minimale Ordnung	12
4.3	Inverse Laplace Transformation	12
4.4	Pole und Nullstellen	13
4.4.1	Pole	13
4.4.2	Nullstellen	13
4.5	Bounded Input Bounded Output - BIBO	14
4.5.1	Vergleich BIBO-Lyapunov Stabilität	14
5	Frequenzantworten	14
5.1	Nyquist-Diagramm	15
5.2	Bode-Diagramm	15
5.3	Eigenschaften von asymptotisch stabilen Systemen	16
5.4	Systemidentifikation mit Hilfe der Frequenzantwort	16
5.5	Unsicherheitsmodell	17
6	Analyse von Feedback-Systemen	17
6.1	Definitionen	17
6.2	Nyquist Theorem	18
6.3	Robustheit	18
6.4	Robuste Stabilität	19
6.5	Bedingungen für den geschlossenen Regelkreis	19

6.6	Statischer Nachlauffehler	20
6.7	Zeitbereich Spezifikationen (System zweiter Ordnung)	20
6.8	Frequenzbereich Spezifikationen	20
6.8.1	Nominelle Regelgüte	20
6.8.2	Robuste Regelgüte	21
7	Feedback Control Design	21
7.1	PID Regler	21
7.2	Ziegler-Nichols	21
7.3	Loop Shaping	22
A	Mathematik	23
A.1	Matrizen	23
A.1.1	Inverse Matrix	23
A.1.2	Eigenwertproblem	23
A.2	Komplexe Analysis	23
A.2.1	Rechenregel	23
B	Mechanik	24
B.1	Dynamik und Kräfte	24
B.2	Arbeit und Leistung	24
C	MATLAB	25
C.1	Allgemein	25
C.2	RT-Befehle	25
C.2.1	Plot und Diagramme	26

1 Regelungstechnik und Systeme

1.1 Definitionen

Signal: Ein Signal ist eine Funktion der Zeit. In dem in Abbildung 1 dargestellten Regelsystem sind z.B. u und y Signalen.

System: Ein System ist ein Operator, der Signale bearbeitet. Der Block Σ in Abbildung 1 ist z.B. ein System: Der Signal u wird in y transformiert.

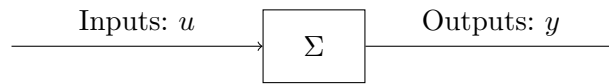


Abbildung 1: System Σ , mit Eingangssignal u und Ausgangssignal y .

1.2 Eigenschaften von Systemen

SISO/MIMO: SISO (Single Input Single Output) sind Systemen mit genau einem Eingangssignal und einem Ausgangssignal. Sonst heisst das System MIMO (Multiple Input Multiple Output).

Linear/Nichtlinear: Ein System Σ heisst linear, falls es gilt

$$\Sigma(\alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2) = \alpha \cdot \Sigma(u_1) + \beta \cdot \Sigma(u_2). \quad (1.1)$$

Sonst heisst das System nichtlinear.

Statisch/Dynamisch: In statischen Systemen hängt der Ausgangswert nur von dem aktuellen Eingang und nicht von der Vergangenheit wie in dynamischen Systemen ab. Somit werden statische Systeme durch Gleichungen und dynamische Systeme durch Differentialgleichungen beschrieben.

Zeitvariant/Zeitinvariant: Ändert sich das System mit der Zeit, dann ist es zeitvariant. Sonst wird es zeitinvariant genannt.

Ordnung des Systems: Die Ordnung des Systems entspricht der Anzahl Zustände (Pegelvariablen), die mit der Ordnung der höchsten Ableitung im System übereinstimmt.

1.3 Schaltung von Systemen

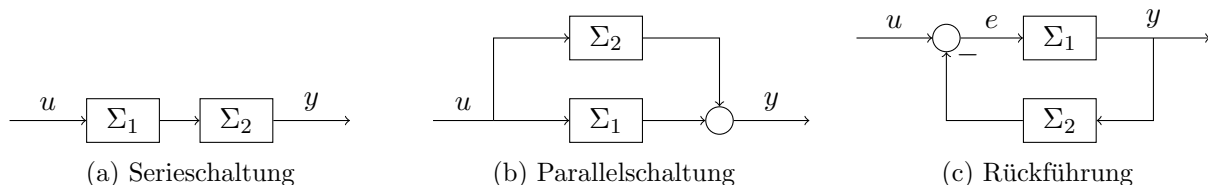


Abbildung 2: Schaltung von Systemen

Das gesamte System ist gegeben durch:

- Serieschaltung: $\Sigma_{\text{tot}} = \Sigma_2 \cdot \Sigma_1$;
- Parallelschaltung: $\Sigma_{\text{tot}} = \Sigma_2 + \Sigma_1$;
- Rückführung: $\Sigma_{\text{tot}} = (1 + \Sigma_1 \cdot \Sigma_2)^{-1} \cdot \Sigma_1$.

1.4 Weitere Grössen

Störung: Eine Störung ist eine externe Beeinflussung auf der Strecke (“Plant”), z.B. Wind bei der Regelung der Geschwindigkeit eines Autos.

Rauschen: Rauschen ist eine externe Beeinflussung in der Messung einer physikalischen Grösse.

1.5 Ziele der Regelungstechnik

Die Hauptziele der Regelungstechnik sind:

- Folgeregelung (“Reference tracking”), z.B. Erhitzung eines Ofens auf eine bestimmte Temperatur.
- Störungsunterdrückung (“Disturbance rejection”), z.B. Behaltung einer konstanten Temperatur in einem Ofen.
- Stabilisierung, z.B. Stabilisierung eines invertierten Pendels.

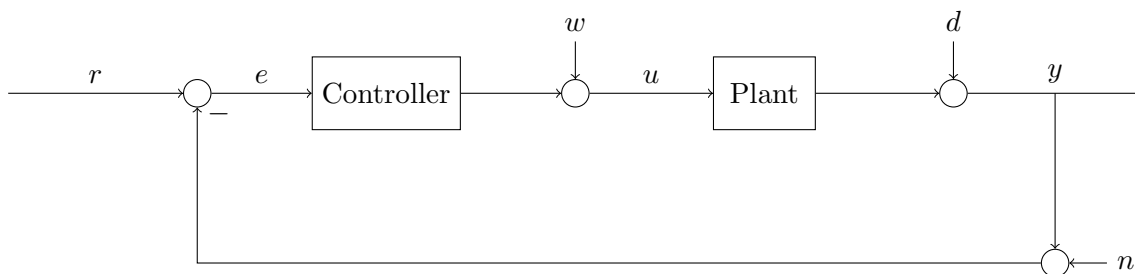


Abbildung 3: Signalflussbild eines Systems mit Rückführung (Feedback).

2 Modellierung eines dynamischen Systems

2.1 Allgemeines Vorgehen für die Modellierung

1. System und Systemgrenze identifizieren.
2. Reservoirs und Pegelvariablen bestimmen (relevante Dynamik).
3. Algebraische Relationen der Flüsse in Abhängigkeit der Pegelvariablen formulieren.
4. Für alle Reservoirs die entsprechende Differentialgleichung formulieren:

$$\frac{d}{dt}(\text{Inhalt}) = \sum \text{Einfüsse} - \sum \text{Ausflüsse}. \quad (2.1)$$

Bemerkung. Oft ist der Inhalt (Reservoir) eine Energie. Gleichung (2.1) ist somit:

$$\frac{d}{dt}E_{\text{tot}}(t) = P_+(t) - P_-(t),$$

wobei $P(t)$ eine Leistung ist (siehe Appendix B).

Bemerkung. Die Differentialgleichung kann auch direkt mit den Prinzipien der Physik (Mechanik, Thermodynamik, Elektromagnetismus, ...) formuliert werden (siehe B).

Bemerkung. Für den Punkt 2 ist es wichtig zu erkennen, welche Variablen relevante Dynamik besitzen: Statische (“langsame”) Variablen können als konstant approximiert werden, algebraische (“schnelle”) Variablen können durch algebraische Funktionen ausgedrückt werden.

Als Resultat der Modellierung eines dynamischen Systems bekommt man eine sogenannte Zustandsraumdarstellung (Differentialgleichungssystem):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}z(t) &= f(z(t), v(t)) \\ w(t) &= g(z(t), v(t)),\end{aligned}\tag{2.2}$$

wobei:

- $v(t) \in \mathbb{R}$: Input des Systems;
- $w(t) \in \mathbb{R}$: Output des Systems;
- $z(t) \in \mathbb{R}^n$: Vektor der Pegelvariablen (Zustand des Systems).

2.2 Gleichgewicht

Ein System befindet sich im Gleichgewicht, wenn alle Zustandsvariablen sich nicht ändern. Also muss die Bedingung

$$\frac{d}{dt}z(t) = 0\tag{2.3}$$

erfüllt sein. Aus (2.2) folgt:

$$f(z_e, v_e) = 0 \quad \text{und} \quad w_e = g(z_e, v_e).\tag{2.4}$$

Aus Gleichung (2.4) kann der Gleichgewichtszustand bestimmt werden.

2.3 Normieren

Ziel der Normierung ist, alle Systemvariablen dimensionslos und zu Grössenordnung 1 zu transformieren. Dazu nimmt man an, dass das System in der Nähe eines Zustandes (z_0, v_0, w_0) arbeitet. Man führt die neue $x(t), u(t), y(t)$ entsprechend ein:

$$z_i(t) = z_{i,0} \cdot x(t), \quad v(t) = v_0 \cdot u(t), \quad w(t) = w_0 \cdot y(t).\tag{2.5}$$

Unter Einsetzen dieser neuen Grössen in (2.2) bekommt man:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= T^{-1} \cdot f(T \cdot x(t), v_0 \cdot u(t)) = f_0(x(t), u(t)) \\ y(t) &= \frac{1}{w_0} \cdot g(T \cdot x(t), v_0 \cdot u(t)) = g_0(x(t), u(t)),\end{aligned}\tag{2.6}$$

wobei

$$T = \text{diag}(z_{1,0}, \dots, z_{n,0}), \quad z(t) = T \cdot x(t).$$

2.4 Linearisierung

Oft wird die Modellierung des Systems durch nichtlineare Gleichungen (f, g) beschrieben, mit denen man trotzdem nicht arbeiten kann. Deshalb muss man die gefundenen Gleichungen mit Hilfe einer Taylor Entwicklung um einen Gleichgewichtspunkt linearisieren.

Man nimmt an, dass

$$\begin{aligned}x(t) &= x_e + \delta x(t) \\ u(t) &= u_e + \delta u(t) \\ y(t) &= y_e + \delta y(t)\end{aligned}\tag{2.7}$$

mit $|\delta(\dots)| \ll 1$.

Mit der Taylor Entwicklung (Vernachlässigung aller Term mit Ordnung 2 oder höher) bekommt man

$$f_0(x_e + \delta x(t), u_e + \delta u(t)) \approx \underbrace{f_0(x_e, u_e)}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial x_0}(x_e, u_e) \cdot \delta x(t) + \frac{\partial f}{\partial u_0}(x_e, u_e) \cdot \delta u(t)$$

und somit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= A \cdot x(t) + b \cdot u(t) \\ y(t) &= c \cdot x(t) + d \cdot u(t), \end{aligned} \quad (2.8)$$

wobei

$$A = \frac{\partial f}{\partial x_0}(x_e, u_e) = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_{0,1}}{\partial x_1} \right|_{x=x_e, u=u_e} & \cdots & \left. \frac{\partial f_{0,1}}{\partial x_n} \right|_{x=x_e, u=u_e} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_{0,n}}{\partial x_1} \right|_{x=x_e, u=u_e} & \cdots & \left. \frac{\partial f_{0,n}}{\partial x_n} \right|_{x=x_e, u=u_e} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (2.9)$$

$$b = \frac{\partial f}{\partial u_0}(x_e, u_e) = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_{0,1}}{\partial u} \right|_{x=x_e, u=u_e} \\ \vdots \\ \left. \frac{\partial f_{0,n}}{\partial u} \right|_{x=x_e, u=u_e} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \quad (2.10)$$

$$c = \frac{\partial g}{\partial x_0}(x_e, u_e) = \left[\left. \frac{\partial g_{0,1}}{\partial x_1} \right|_{x=x_e, u=u_e} \cdots \left. \frac{\partial g_{0,1}}{\partial x_n} \right|_{x=x_e, u=u_e} \right] \in \mathbb{R}^{1 \times n}, \quad (2.11)$$

$$d = \frac{\partial g}{\partial u_0}(x_e, u_e) = \left[\left. \frac{\partial g_{0,1}}{\partial u} \right|_{x=x_e, u=u_e} \right] \in \mathbb{R}^{1 \times 1}. \quad (2.12)$$

Bemerkung. Die Beschreibung eines Systems gemäss (2.8) zeigt die Abweichung aus der Gleichgewichtslage, der Einfachheit halber wird aber “ δ ” weggelassen.

2.5 Signalflussbild

In Regelungstechnik können System auch mit einem Signalflussbild dargestellt werden. Diese Darstellung wird benutzt, um das System in **Simulink** zu implementieren.

Bemerkung. Die Ordnung des Systems entspricht die Ordnung der Differentialgleichungssystem und, in dem Signalflussbild, die Anzahl Integratoren, die man benötigt, das System darzustellen.

3 Analyse linearer Systeme

3.1 Allgemeine Lösung der Modellgleichung

Die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}x(t) = A \cdot x(t) + b \cdot u(t), \quad x(0) = x_0$$

besitzt die Lösung

$$x(t) = e^{A \cdot t} \cdot x_0 + \int_0^t e^{A \cdot (t-\varrho)} \cdot b \cdot u(\varrho) d\varrho,$$

wobei

$$e^{A \cdot t} = \mathbb{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(A \cdot t)^n}{n!}.$$

Die allgemeine Lösung ist somit

$$y(t) = c \cdot e^{A \cdot t} \cdot x_0 + \underbrace{\int_0^t c \cdot e^{A \cdot (t-\varrho)} \cdot b \cdot u(\varrho) \, d\varrho}_{\text{Faltung}} + d \cdot u(t). \quad (3.1)$$

3.2 Lyapunov Stabilität

Die Lyapunov Stabilität analysiert das Verhalten eines Systems in der Nähe eines Gleichgewichtspunktes wenn $u(t) = 0$. Man unterscheidet zwischen drei Fällen:

- Asymptotisch stabil: $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$;
- (Grenz)stabil: $\|x(t)\| < \infty \forall t \geq 0$;
- Instabil: $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = \infty$.

In diesem Fall ist $x(t) = e^{A \cdot t} \cdot x_0$ und mit einer Transformation in der Eigenbasis der Matrix A kann man zeigen, dass die Stabilität anhand der Eigenwerte λ_i von A bestimmt werden kann:

- Asymptotisch stabil: $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \forall i$;
- (Grenz)stabil: $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0 \forall i$, aber nicht asymptotisch stabil;
- Instabil: $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$ für mindestens eine i .

Satz. Wenn ein linearisiertes System asymptotisch stabil oder instabil ist, dann ist auch das nichtlineare System asymptotisch stabil oder instabil. Im Fall eines grenzstabilen Systems kann man trotzdem nichts über das Stabilitätsverhalten des nichtlinearen Systems sagen.

3.3 Steuerbarkeit

Ein System heisst steuerbar, falls mit einem beliebigen Input u ein beliebiger Zustand x erreicht werden kann. Anders gesagt, kann das System auf alle Zustände gebracht werden.

Ein System ist vollständig steuerbar, falls die Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathcal{R} = [b \quad A \cdot b \quad \dots \quad A^{n-1} \cdot b] \quad (3.2)$$

vollen Rang hat.

Ein System heisst potentiell stabilisierbar, falls alle nicht-steuerbaren Zustände asymptotisch stabil sind.

Bemerkung. Manchmal spricht man auch von Erreichbarkeit. Die zwei Konzepte sind für lineare zeitinvariante Systeme äquivalent.

3.4 Beobachtbarkeit

Ein System heisst beobachtbar, falls man aufgrund des Outputsignals eindeutig auf den Anfangszustand schliessen kann.

Ein System ist vollständig beobachtbar, falls die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} c \\ c \cdot A \\ \vdots \\ c \cdot A^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

vollen Rang hat.

Ein System heisst detektierbar, falls alle nicht-beobachtbaren Zustände asymptotisch stabil sind.

3.5 Stabilisierbarkeit

Ein instabiles System ist stabilisierbar, falls es potentiell stabilisierbar und detektierbar ist, d.h. alle nicht-steuerbare und/oder nicht-beobachtbaren Zustände asymptotisch stabil sind.

3.6 I/O-Beschreibung eines Systems

Bis jetzt haben wir immer ein System durch eine Zustandsraumdarstellung (Space State Modell, siehe Gleichung (2.8)) beschrieben. Eine zweite Möglichkeit ist die Input/Output Beschreibung, mit der Input und Output direkt verbunden sind. Die typische Form einer solchen Beschreibung ist eine Differentialgleichung n -ter Ordnung:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \cdot y^{(1)}(t) + a_0 \cdot y(t) = b_m \cdot u^{(m)}(t) + \dots + b_0 \cdot u(t). \quad (3.4)$$

Die innere Darstellung eines mit (3.4) beschriebenen Systems ist gegeben durch

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

$$c = [b_0 \quad \dots \quad b_m \quad 0 \quad \dots \quad 0], \quad d = [0].$$

Bemerkung. Eine mit Gleichung (3.5) gefundene Zustandsraumdarstellung eines Systems ist immer vollständig steuerbar und vollständig beobachtbar.

4 Frequenzbereich

4.1 Laplace Transformation

In diesen ersten drei Kapiteln haben wir gesehen, dass dynamische Systeme durch Differentialgleichungen beschrieben werden können. Gleichung (3.1) ist ein mögliches aber ungünstiges Lösungsverfahren, die zu lösen. Deshalb benutzt man die Laplace Transformation, um die Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen umzuwandeln. Man sagt auch, dass mit der Laplace Transformation das Problem im Frequenzbereich (statt im Zeitbereich) gelöst wird.

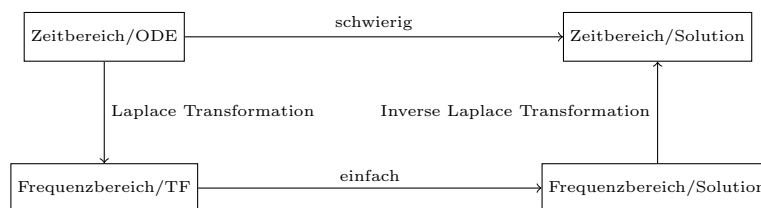


Abbildung 4: Zeitbereich und Frequenzbereich

Die Laplace Transformation ist definiert als

$$\mathcal{L}(x(t)) = X(s) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt. \quad (4.1)$$

4.1.1 Eigenschaften der Laplace Transformation

Beschreibung	$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}(f(t))$
Linearität	$a \cdot f_1(t) + b \cdot f_2(t)$	$a \cdot F_1(s) + b \cdot F_2(s)$
Ähnlichkeit	$\frac{1}{a} \cdot f\left(\frac{t}{a}\right)$	$F(s \cdot a)$
Verzögerung (Totzeit)	$f(t - a)$	$e^{-a \cdot s} \cdot F(s)$
Verschiebungssatz	$h(t - a) \cdot f(t - a)$	$F(s) \cdot e^{-a \cdot s}$
Dämpfung	$f(t) \cdot e^{a \cdot t}$	$F(s - a)$
Ableitung in t	$\frac{d}{dt} f(t)$	$s \cdot F(s) - f(0)$
Integration in t	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} \cdot F(s)$
Faltung in t	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s) \cdot F_2(s)$
Ableitung in s	$t \cdot f(t)$	$-\frac{d}{ds} F(s)$
Integration in s	$\frac{1}{t} \cdot f(t)$	$\int_s^\infty F(\sigma) d\sigma$
Faltung in s	$f_1(t) \cdot f_2(t)$	$F_1(s) * F_2(s)$
Anfangswerttheorem	$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$
Endwerttheorem	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0^+} s \cdot F(s)$

4.1.2 Laplace-Transformation von einigen Funktionen

Beschreibung	$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}(f(t))$
Diracstoss	$\delta(t)$	1
Sprungfunktion	$h(t)$	$\frac{1}{s}$
Rampe	$r(t) = h(t) \cdot t$	$\frac{1}{s^2}$
	$h(t) \cdot t^n \cdot e^{-a \cdot t}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
Sinus	$h(t) \cdot \sin(\omega \cdot t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
Cosinus	$h(t) \cdot \cos(\omega \cdot t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
Sinus Hyperbolicus	$h(t) \cdot \sinh(\omega \cdot t)$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
Cosinus Hyperbolicus	$h(t) \cdot \cosh(\omega \cdot t)$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$

4.2 Übertragungsfunktion

Die Übertragungsfunktion eines Systems ist definiert als

$$\Sigma(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}. \quad (4.2)$$

4.2.1 Zustandsraumdarstellung

Mit der Laplace Transformation einer Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= A \cdot x(t) + b \cdot u(t) \\ y(t) &= c \cdot x(t) + d \cdot u(t) \end{aligned}$$

findet man, dass die Übertragungsfunktion durch

$$\Sigma(s) = c \cdot (s \cdot \mathbb{I} - A)^{-1} \cdot b + d \quad (4.3)$$

gegeben ist.

4.2.2 I/O Darstellung

Mit der Laplace Transformation einer Input/Output Darstellung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \cdot y^{(1)}(t) + a_0 \cdot y(t) = b_m \cdot u^{(m)}(t) + \dots + b_0 \cdot u(t).$$

findet man, dass die Übertragungsfunktion durch

$$\Sigma(s) = \frac{b_m \cdot s^m + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0} \quad (4.4)$$

gegeben ist. Daraus kann man auch die Zustandsraumdarstellung einer gegebenen Übertragungsfunktion finden, indem man durch eine I/O Darstellung geht (siehe 3.6).

4.2.3 Eigenschaften der Übertragungsfunktion

Die Übertragungsfunktion eines Systems ist das Verhalten zwischen Output $Y(s)$ und Input $U(s)$. Da sie eine rationale Funktion ist kann sie als

$$\Sigma(s) = b_m \cdot \frac{\prod_{i=1} (s - \zeta_i)}{\prod_{j=1} (s - \pi_j)} \quad (4.5)$$

geschrieben werden, wobei ζ_i die Nullstellen und π_i die Polen des Systems sind.

Wenn eine Nullstelle ζ_i und ein Pol π_j übereinstimmen, kann man die entsprechenden Faktoren wegekürzen. Ist eine solche Kürzung möglich, dann ist das System entweder nicht vollständig beobachtbar oder nicht vollständig steuerbar (oder beide).

Man sieht auch, dass die Pole π_j die Eigenwerte der Matrix A sind. Umgekehrt gilt aber im Allgemeinen nicht, weil eine Pol-Nullstelle Kürzung vorkommen könnte.

4.2.4 Minimale Ordnung

Die minimale Ordnung eines Systems ist definiert als

$$\min\{\text{rank}(\mathcal{O}), \text{rank}(\mathcal{R})\}. \quad (4.6)$$

Ein System ist also minimaler Ordnung, falls es sowohl vollständig steuerbar und vollständig beobachtbar ist, d.h. wenn alle Pole π_i und alle Eigenwerte λ_i übereinstimmen (keine Kürzung). Ein System nicht-minimaler Ordnung kann mit folgenden Schritten in ein System minimaler Ordnung umgeformt werden:

1. Übertragungsfunktion $\Sigma(s)$ berechnen.
2. Pole-Nullstellen kürzen (nicht beobachtbare/steuerbare Anteile werden eliminiert).
3. System in Zustandsraumdarstellung bringen (durch eine I/O Darstellung).

4.3 Inverse Laplace Transformation

Aus der Definition (4.2) folgt, dass

$$Y(s) = \Sigma(s) \cdot U(s),$$

d.h. mit der Übertragungsfunktion des Systems und der Laplace Transformation des Eingangssignals $u(t)$ kann man die Antwort des Systems im Frequenzbereich berechnen. Um diese in Zeitbereich zu bringen, brauchen wir die Inverse Laplace Transformation.

Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung bekommt man

$$Y(s) = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^{\phi_i} \frac{\rho_{i,k}}{(s - \pi_i)^k}, \quad (4.7)$$

wobei π_i bezeichnet den i -ten Pol, ϕ_i die zugehörige Vielfachheit. $\rho_{i,k}$ sind die sogenannten Residuen (Koeffizienten der Partialbruchzerlegung):

$$\rho_{i,k} = \lim_{s \rightarrow \pi_i} \frac{1}{(\phi_i - k)!} \cdot \left(\frac{d^{(\phi_i - k)}}{ds^{(\phi_i - k)}} \left(Y(s) \cdot (s - \pi_i)^{\phi_i} \right) \right). \quad (4.8)$$

Mit den Tabellen der Laplace Transformation findet man also, dass die gesuchte Antwort des System durch

$$y(t) = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^{\phi_i} \frac{\rho_{i,k}}{(k-1)!} \cdot t^{k-1} \cdot e^{\pi_i \cdot t} \cdot h(t) \quad (4.9)$$

gegeben ist.

Bemerkung. Im Fall komplexe konjugierte Pole muss man die Faktoren $e^{\pi_i \cdot t}$ so kombinieren, dass sie zu $\sin(t)/\cos(t)$ vereinfachen. Alternativ, kann man auch die Partialbruchzerlegung so machen, dass keine komplexen Zahlen vorkommen, da auch die Inverse von $\frac{1}{s^2 \pm c^2}$ bekannt sind.

Bemerkung. Die Inverse Laplace Transformation $\sigma(t)$ einer Übertragungsfunktion $\Sigma(s)$ stimmt mit der Impulsantwort des Systems überein (da $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$).

4.4 Pole und Nullstellen

4.4.1 Pole

Aus Gleichung (4.9) sieht man, dass Pole, die eine positive Realteil haben, zu einem instabilen System führen. Aus diesem Grund nennt man sie instabile Pole.

Die Pole sind auch für die Schwingungsfähigkeit verantwortlich: Komplex konjugierte Pole sind die Ursache einer Schwingung (siehe Abbildung 5b).

4.4.2 Nullstellen

Nullstellen haben keinen Einfluss auf die Stabilität des Systems. Nullstelle mit einem positiven Realteil werden nichtminimalphasig genannt und sind Ursache eines wichtigen (unerwünschten) Verhaltens des Systems: Das System lügt, d.h. die Antwort geht zuerst in die falsche Richtung (siehe Abbildung 5a).

Nullstellen mit einem negativen Realteil werden dagegen als minimalphasig bezeichnet.

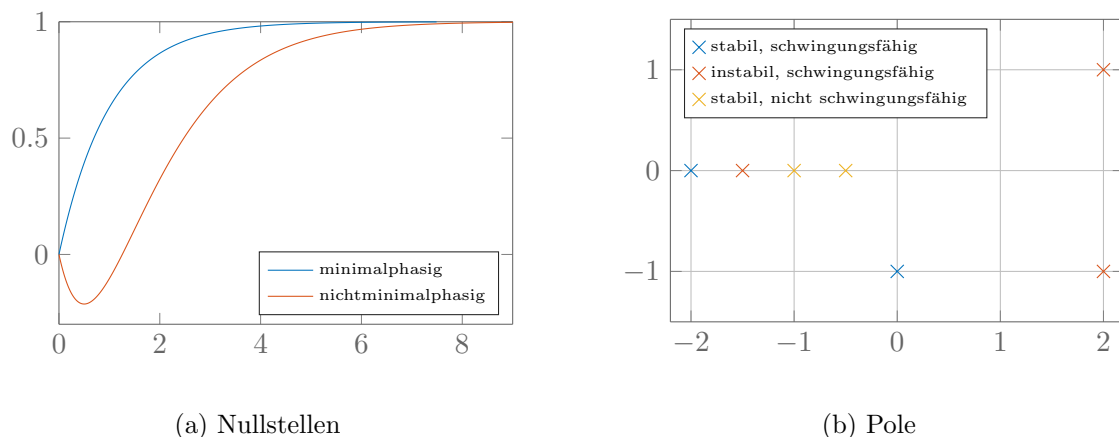


Abbildung 5: Nullstellen und Pole bestimmen das Verhalten des Systems.

4.5 Bounded Input Bounded Output - BIBO

Ein System heisst BIBO-stabil, falls allen begrenzten ($< \infty$) Inputs ein begrenzter Output ($< \infty$) entspricht.

Das ist erfüllt, falls gilt

$$\int_0^{\infty} |\sigma(t)| dt < \infty, \quad (4.10)$$

d.h. wenn das Integral der Impulsantwort konvergiert. Das ist der Fall, wenn alle Pole π_i einen negativen Realteil haben.

4.5.1 Vergleich BIBO-Lyapunov Stabilität

Asymptotisch stabil	BIBO stabil
Grenzstabil	BIBO stabil/BIBO nicht stabil
Instabil	BIBO stabil/BIBO nicht stabil

Erklärung: Für Systeme nicht minimaler Ordnung sind die Eigenwerte und die Pole nicht gleich, d.h. instabile Eigenwerte können nicht als Pole vorkommen (Pole-Nullstellen Kürzung).

5 Frequenzantworten

Wenn ein lineares, asymptotisch stabiles, zeitinvariantes System harmonisch angeregt wird, ist die entsprechende Antwort nach grosser Zeit wiederum durch eine harmonische Funktion gegeben, die die gleiche Frequenz ω aufweist.

Im Frequenzbereich bekommt man (mit Hilfe der Partialbruchzerlegung):

$$Y(s) = \Sigma(s) \cdot U(s) = \Sigma(s) \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^{\phi_i} \frac{\rho_{i,k}}{(s - \pi_i)^k} + \frac{\alpha \cdot s + \beta \cdot \omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (5.1)$$

Mit der Inverse Laplace Transformation können wir jetzt die Antwort in Zeitbereich ausdrücken. Da das System asymptotisch stabil ist, ist der Realteil aller Pole negativ, also geht die Zeitlösung gegen Null für grosse Zeit. Uns bleibt nur der Faktor

$$y_{\infty}(t) = \alpha \cdot \cos(\omega \cdot t) + \beta \cdot \sin(\omega \cdot t) = m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi),$$

wobei

$$m = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad \text{und} \quad \varphi = \arctan\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Für die Berechnung der Parameter m und φ multipliziert man Gleichung (5.1) mit $s^2 + \omega^2$:

$$\Sigma(s) \cdot s = \sum_{i=1}^p \sum_{k=0}^{\phi_i} \frac{\rho_{i,k} \cdot (s^2 + \omega^2)}{(s - \pi_i)^k} + \alpha \cdot s + \beta \cdot \omega. \quad (5.2)$$

Mit $s \rightarrow j \cdot \omega$ erhält man eine Gleichung für α und β :

$$\Sigma(j \cdot \omega) = \alpha - j \cdot \beta. \quad (5.3)$$

Die Parameter α und β lassen sich daraus einfach berechnen. Die Lösung im Zeitbereich lauten somit

$$y_{\infty}(t) = |\Sigma(j \cdot \omega)| \cdot \cos(\omega \cdot t + \angle(\Sigma(j \cdot \omega))). \quad (5.4)$$

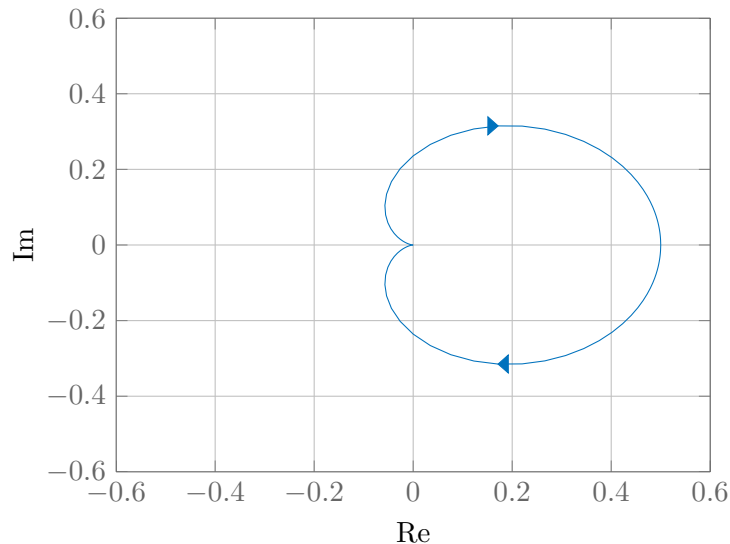


Abbildung 6: Beispiel eines Nyquist-Diagramms.

5.1 Nyquist-Diagramm

Das Nyquist-Diagramm ist eine frequenzimplizite Darstellung der komplexen Zahl $\Sigma(j \cdot \omega)$ in der komplexen Ebene.

Bemerkung. Für das Zeichnen einer Übertragungsfunktion können folgende Größen hilfreich sein:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \Sigma(j \cdot \omega), \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \Sigma(j \cdot \omega), \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle(\Sigma(j \cdot \omega)).$$

5.2 Bode-Diagramm

Das Bode-Diagramm ist eine Frequenzexplizite Darstellung von $|\Sigma(j \cdot \omega)|$ und von $\angle(\Sigma(j \cdot \omega))$. Aus graphischen Grund benutzt man decibel (dB) für die Amplitude und Graden für die Phase:

$$\mathbb{X}_{\text{dB}} = 20 \cdot \log_{10}(\mathbb{X}), \quad \mathbb{X} = 10^{\frac{\mathbb{X}_{\text{dB}}}{20}}. \quad (5.5)$$

Im Bode-Diagramm spielen Pole und Nullstellen eine wichtige Rolle:

- Pole verursachen einen Amplitudengradient von -20 dB/dec :

	stabil	instabil
Betrag	-20 dB/dec	-20 dB/dec
Phase	-90°	$+90^\circ$

- Nullstelle verursachen einen Amplitudengradient von $+20 \text{ dB/dec}$:

	minimalphasig	nichtminimalphasig
Betrag	$+20 \text{ dB/dec}$	$+20 \text{ dB/dec}$
Phase	90°	-90°

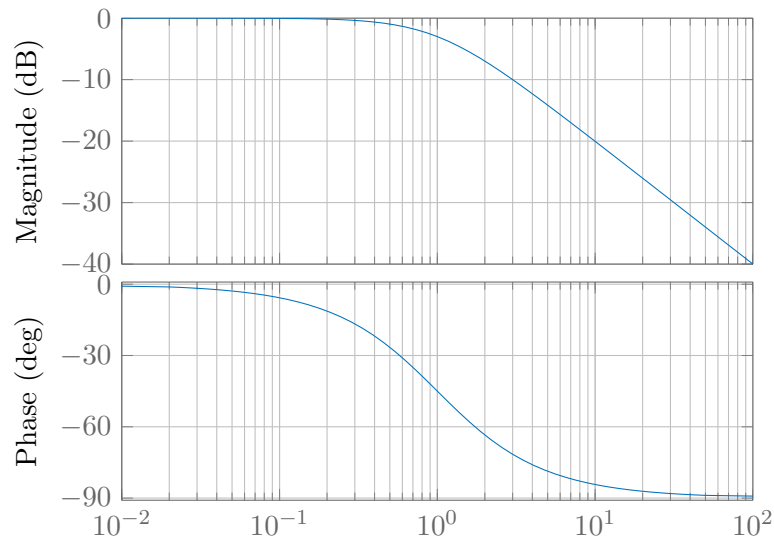


Abbildung 7: Beispiel eines Bode-Plots.

5.3 Eigenschaften von asymptotisch stabilen Systemen

Jede Übertragungsfunktion kann in folgender Form umgeschrieben werden:

$$\Sigma(s) = \frac{b_m \cdot s^m + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{s^k \cdot (s^{n-k} + a_{n-k-1} \cdot s^{n-k-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0)}. \quad (5.6)$$

Daraus definiert man:

- Der relative Grad ist definiert als

$$r = n - m. \quad (5.7)$$

Es gilt:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\partial |\Sigma(j \cdot \omega)|_{\text{dB}}}{\partial \log(\omega)} = -r \cdot 20 \text{ dB/dec.} \quad (5.8)$$

- Der Typus k entspricht der Anzahl Integratoren im System. Es gilt:

$$\angle(\Sigma(0)) = \left(\text{sign} \left(\frac{b_0}{a_0} \right) - 1 \right) \cdot \frac{\pi}{2} - k \cdot \frac{\pi}{2}. \quad (5.9)$$

5.4 Systemidentifikation mit Hilfe der Frequenzantwort

Mit Hilfe des Bode-Diagramms ist es möglich, die zugehörige Übertragungsfunktion zu erkennen. Dazu nimmt man an, dass es um eine Hintereinanderschaltung von Standardelementen (siehe Appendix) geht. Diese ist eine Multiplikation von Übertragungsfunktionen, die im Bode-Diagramm wegen der Decibel-Skala einer Summe entspricht.

Man geht also wie folgt vor:

1. System in Standardelemente aufteilen.
2. Charakteristische Größen dieser Elemente (τ, k, \dots) bestimmen.
3. Gefundene Übertragungsfunktionen multiplizieren.

Bemerkung. Die Bestimmung der Übertragungsfunktion ist nicht eindeutig.

5.5 Unsicherheitsmodell

Die Unsicherheit $W_2(s)$ eines Modells $\Sigma(s)$ ist so definiert, dass es $\Sigma_{\text{true}} \in \mathcal{S}$ gilt, wobei

$$\mathcal{S} = \{\Sigma(s) \cdot (1 + \Delta \cdot W_2(s)) \mid |\Delta| \leq 1, \angle(\Delta) \in [-\pi, \pi]\}. \quad (5.10)$$

Die Frequenz ω_2 ist die Frequenz, bei der die Unsicherheit 100% beträgt, d.h. es gilt

$$|W_2(j \cdot \omega_2)| = 1 = 0 \text{ dB}. \quad (5.11)$$

6 Analyse von Feedback-Systemen

6.1 Definitionen

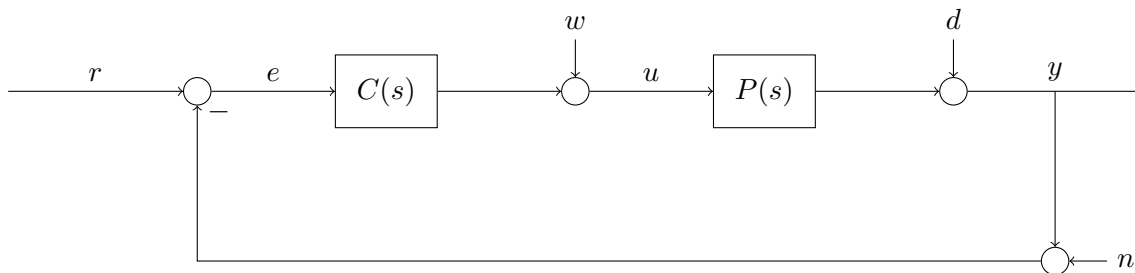


Abbildung 8: Signalflussbild eines Regelsystems mit Rückführung.

Die Kreisverstärkung ist definiert als

$$L(s) = P(s) \cdot C(s), \quad (6.1)$$

wobei $P(s)$ bezeichnet die Strecke (System) und $C(s)$ bezeichnet den Regler.

Daraus definiert man auch die Sensivität

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \quad (6.2)$$

und die komplementäre Sensivität

$$T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}, \quad (6.3)$$

die der Übertragungsfunktion von r nach y entspricht. Aus diesen Definitionen folgt:

$$S(s) + T(s) = 1. \quad (6.4)$$

Der Ausgangssignal des Systems $Y(s)$ ist gegeben durch

$$Y(s) = T(s) \cdot R(s) + S(s) \cdot D(s) - T(s) \cdot N(s) + S(s) \cdot P(s) \cdot W(s). \quad (6.5)$$

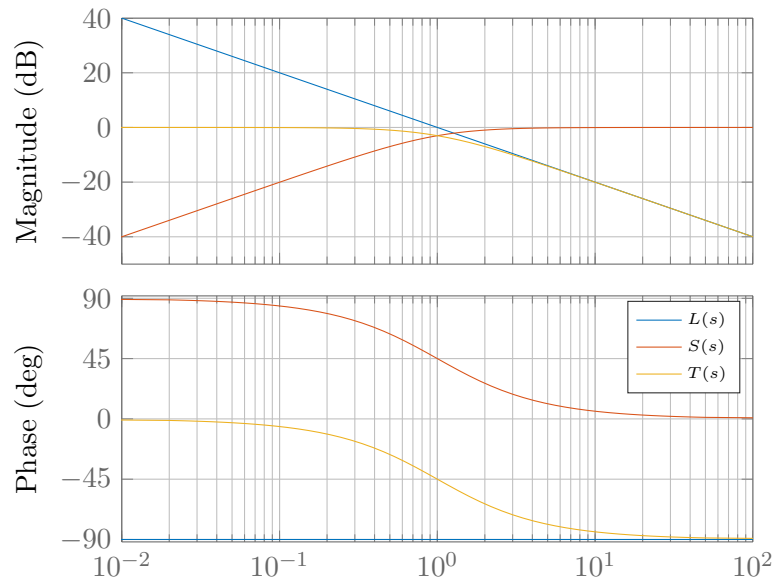
Der Fehler $E(s)$ ist gegeben durch

$$E(s) = S(s) \cdot (R(s) - D(s) - N(s) - P(s) \cdot W(s)). \quad (6.6)$$

In diesen letzten zwei Definitionen $R(s), D(s), N(s), W(s)$ bezeichnen die Laplace Transformierungen der entsprechenden Signalen $r(t), d(t), n(t), w(t)$.

Zusätzlich definiert man die Durchtrittsfrequenz ω_c , für die gilt

$$|L(j \cdot \omega_c)| = 1 = 0 \text{ dB}. \quad (6.7)$$

Abbildung 9: Typische Bode-Diagramme für $L(s)$, $S(s)$, $T(s)$.

6.2 Nyquist Theorem

Ein geschlossener Regelkreis $T(s)$ ist asymptotisch stabil genau dann, wenn $L(s)$ das Nyquist Theorem erfüllt ist.

Satz. $T(s)$ ist asymptotisch stabil, wenn es

$$n_c = n_+ + \frac{n_0}{2} \quad (6.8)$$

gilt, wobei:

- n_c : Anzahl positiver Umdrehungen von $L(s)$ (Gegenuhrzeigersinn) um den Punkt -1;
- n_+ : Anzahl instabiler Pole von $L(s)$, d.h. mit $\text{Re}(\pi) > 0$;
- n_0 : Anzahl grenzstabiler Pole von $L(s)$, d.h. mit $\text{Re}(\pi) = 0$.

6.3 Robustheit

Phasenreserve φ : Abstand von -180° , wenn $L(j \cdot \omega)$ in den Einheitskreis eingeht (also $\omega = \omega_c$):

$$\varphi = 180^\circ + \angle(L(j \cdot \omega_c)). \quad (6.9)$$

Verstärkungsreserve γ : Inverse des Betrags von $L(j \cdot \omega)$ wenn $\angle(L(j \cdot \omega)) = \pi$. Die zugehörige Frequenz wird auch ω_γ genannt. Es gilt:

$$\text{Im}(L(j \cdot \omega_\gamma)) = 0, \quad \frac{1}{\gamma} = |\text{Re}(j \cdot \omega_\gamma)|. \quad (6.10)$$

Minimum return Difference μ_{\min} : Minimaler Abstand von den Punkt -1:

$$\mu = \min_{\omega} |1 + L(j \cdot \omega)|. \quad (6.11)$$

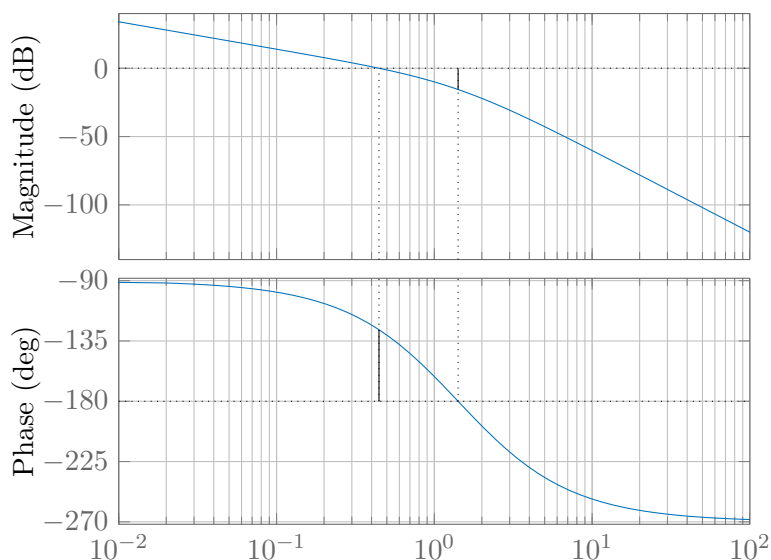


Abbildung 10: $\omega_c, \omega_\gamma, \varphi, \gamma$ können auch aus dem Bode-Diagramm gelesen werden.

6.4 Robuste Stabilität

Mit dem Nyquist-Theorem (siehe 6.2) haben wir gesehen, wie man die Stabilität des geschlossenen Regelkreises beurteilen kann. In der Praxis muss man aber noch berücksichtigen, dass das Modell $L(s)$ nicht perfekt ist. Also muss zusätzlich gelten:

$$|W_2(j \cdot \omega) \cdot L(j \cdot \omega)| < |1 + L(j \cdot \omega)| \quad \forall \omega \in [0, \infty]. \quad (6.12)$$

Anders gesagt, muss man garantieren, dass die reale Kreisverstärkung gleichviele Umdrehungen um den Punkt -1 wie unseres Modell $L(s)$ macht.

6.5 Bedingungen für den geschlossenen Regelkreis

Ziel der Regelungstechnik ist die Auslegung eines Reglers. Bevor man das macht, muss man zuerst überprüfen, ob man das System regeln lässt. Neben der Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit (siehe 3.5) gibt es zusätzliche Bedingungen für die Durchtrittsfrequenz ω_c , die erfüllt werden müssen, um das System regeln zu können. Für die Durchtrittsfrequenz muss gelten:

$$\max(10 \cdot \omega_d, 2 \cdot \omega_{\pi^+}) < \omega_c < \min(0.5 \cdot \omega_{\zeta^+}, 0.1 \cdot \omega_n, 0.5 \cdot \omega_{\text{delay}}, 0.2 \cdot \omega_2), \quad (6.13)$$

wobei:

- $\omega_{\pi^+} = \text{Re}(\pi^+)$: Dominanter (grösster mit $\text{Re}(\pi) > 0$) instabiler Pol;
- $\omega_{\zeta^+} = \text{Re}(\zeta^+)$: Dominante (kleinste mit $\text{Re}(\zeta) > 0$) nichtminimalphasige Nullstelle;
- ω_d : Maximale Störungsfrequenz im System;
- ω_n : Minimale Rauschenfrequenz im System;
- ω_2 : Frequenz mit 100% Unsicherheit ($|W_2(j \cdot \omega_2)| = 1$),
- $\omega_{\text{delay}} = \frac{1}{T_{\text{delay}}}$: Grösste Totzeit im System.

Bemerkung. Die Faktoren in Gleichung (6.13) sind nur Faustregeln: Es gibt deshalb keine richtige oder falsche Angaben.

6.6 Statischer Nachlauffehler

Der statische Fehler ist definiert als

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t). \quad (6.14)$$

Mit dem Endwerttheorem erhält man

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0^+} s \cdot E(s), \quad (6.15)$$

wobei $E(s)$ aus Gleichung (6.6) gelesen werden kann. Für den Fall $r(t) = h(t)$, $n(t) = h(t)$ oder $d(t) = h(t)$:

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0^+} s \cdot S(s) \cdot \frac{1}{s} = S(0) = \frac{1}{1 + L(0)}. \quad (6.16)$$

Bemerkung. Aus Gleichung (6.16) sieht man, dass der statische Nachlauffehler verschwindet, wenn die Kreisverstärkung $L(s)$ mindestens einen offenen Integrator hat. Anders gesagt, muss $L(s)$ von Typ $k > 1$ sein.

6.7 Zeitbereich Spezifikationen (System zweiter Ordnung)

Für ein stabiles ($\text{Re}(\pi) < 0$) System zweiter Ordnung der Form

$$T(s) = k \cdot \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2 \cdot \delta \cdot \omega_0 + \omega_0^2} \quad (6.17)$$

gelten folgende Näherungen:

$$\omega_c \approx \frac{1.7}{t_{90\%}}, \quad \varphi \approx 71^\circ - 117^\circ \cdot \hat{\epsilon}. \quad (6.18)$$

$t_{90\%}$ und $\hat{\epsilon}$ können aus der Sprungantwort gelesen werden:

- $t_{90\%}$: Zeit beim Erreichen von $0.9 \cdot k$.
- $\hat{\epsilon}$: $k \cdot \hat{\epsilon}$ ist die Überschwingung.

Die Parameter von $T(s)$ können auch aus der Sprungantwort hergeleitet werden:

$$\delta = \frac{-\ln \hat{\epsilon}}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\hat{\epsilon})}}, \quad \omega_0 = (0.14 + 0.4 \cdot \delta) \cdot \frac{2 \cdot \pi}{t_{90\%}}. \quad (6.19)$$

Der Parameter k entspricht dem Endwert der Sprungantwort ($k = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$).

6.8 Frequenzbereich Spezifikationen

6.8.1 Nominelle Regelgüte

$W_1(s)$ ist eine Schranke für die Sensitivität $S(s)$:

$$|W_1(j \cdot \omega) \cdot S(j \cdot \omega)| < 1, \quad (6.20)$$

Diese Ungleichung kann auch als

$$|S(j \cdot \omega)| < |W_1^{-1}(j \cdot \omega)| \quad (6.21)$$

oder, unter Verwendung der Gleichung (6.2), als

$$|1 + L(j \cdot \omega)| > |W_1(j \cdot \omega)| \quad (6.22)$$

geschrieben werden.

6.8.2 Robuste Regelgüte

Die Bedingung der robusten Regelgüte ist erfüllt, falls es

$$|W_1(j \cdot \omega) \cdot S(j \cdot \omega)| + |W_2(j \cdot \omega) \cdot T(j \cdot \omega)| < 1 \quad (6.23)$$

gilt, wobei:

- $W_1(s)$: Schranke für die Sensivität (siehe 6.8.1).
- $W_2(s)$: Schranke für die komplementären Sensitivität oder Unsicherheit (siehe 5.5).

Gleichung (6.23) kann auch als

$$|W_1(j \cdot \omega)| + |W_2(j \cdot \omega) \cdot L(j \cdot \omega)| < |1 + L(j \cdot \omega)| \quad (6.24)$$

geschrieben werden.

Bemerkung. Die Funktionen $W_1(s)$ und $W_2(s)$ können aus den Spezifikationen des Systems bestimmt werden (z.B. kleine Sensitivität bei kleinen Frequenzen, um Störungen zu unterdrücken).

Bemerkung. Nominelle und robuste Regelgüte beurteilen nicht die Stabilität des Systems: Diese muss mit dem Nyquist Theorem (siehe 6.2) überprüft werden.

7 Feedback Control Design

7.1 PID Regler

Der PID Regler besteht aus der Parallelschaltung aus einem P-Element, einem Integrator-Element und einem Differentiator-Element, wie in Abbildung 11 gezeigt. Die Übertragungsfunktion ist gegeben durch

$$C_{\text{PID}}(s) = k_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s \right) \cdot \frac{1}{(\tau \cdot s + 1)^2}. \quad (7.1)$$

In Zeit Bereich gilt:

$$u(t) = k_p \cdot \left(1 \cdot e(t) + \frac{1}{T_i} \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \cdot \frac{d}{dt} e(t) \right). \quad (7.2)$$

Bemerkung. Der letzte Term in Gleichung (7.1) ist der sogenannte Roll-Off Term. Ziel dieses Terms ist die Ausschaltung des Reglers bei hohen Frequenzen.

7.2 Ziegler-Nichols

Mit dem Verfahren von Ziegler-Nichols nimmt man an, dass die Regelstrecke mit der Übertragungsfunktion

$$P(s) = \frac{k}{\tau \cdot s + 1} \cdot e^{-T \cdot s} \quad (7.3)$$

approximiert werden kann. Die Reglerparameter können dann wie folgt bestimmt werden:

1. P-Regler mit Verstärkung $k_p^* = \gamma$ auslegen, so dass das Regelsystem grenzstabil ist, d.h.

$$L(j \cdot \omega^*) = k_p^* \cdot P(j \cdot \omega^*) = -1 + 0 \cdot j. \quad (7.4)$$

2. Aus (7.4) die kritische Periode T^* bestimmen. Es gilt:

$$T^* = \frac{2 \cdot \pi}{\omega^*}. \quad (7.5)$$

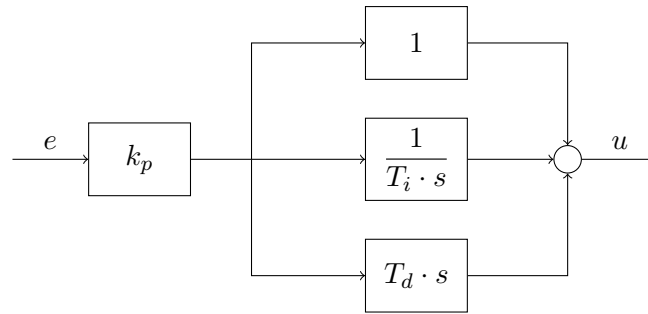


Abbildung 11: Blockdiagramm eines PID-Reglers.

3. Reglerparameter gemäss folgende Tabelle einstellen (Roll-Off: $\tau = T_d/10$).

Regler	k_p	T_i	T_d
P	$0.50 \cdot k_p^*$	$\infty \cdot T^*$	$0 \cdot T^*$
PI	$0.45 \cdot k_p^*$	$0.85 \cdot T^*$	$0 \cdot T^*$
PD	$0.55 \cdot k_p^*$	$\infty \cdot T^*$	$0.15 \cdot T^*$
PID	$0.60 \cdot k_p^*$	$0.50 \cdot T^*$	$0.125 \cdot T^*$

Bemerkung. Da k_p^* und T^* auch experimentell bestimmt werden können, kann der Regler auch ohne eine genaue Modellierung und Analyse der Strecke ausgelegt werden: Man stellt den Parameter des P-Regler so um, dass die Antwort des Systems schwingend ist. Die Periode dieser Schwingung ist die kritische Periode T^* .

7.3 Loop Shaping

Mit dieser Methode versucht man die Robustheitseigenschaften des System durch Zuschalten von Lead- oder Lag-Elementen zu verbessern. Die Übertragungsfunktion des Elements ist

$$C(s) = \frac{T \cdot s + 1}{\alpha \cdot T \cdot s + 1}, \quad (7.6)$$

wobei $\alpha, T \in \mathbb{R}^+$. Es gilt:

- $\alpha < 1$: Lead-Element: Phasenreserve wird erhöht, Betrag des Reglerkreises verkleinert.
- $\alpha > 1$: Lag-Element: Phasenreserve wird verkleinert, Betrag des Reglerkreises erhöht.

Die Parameter des Elementes berechnen sich als

$$\alpha = \left(\sqrt{\tan^2(\hat{\varphi}) + 1} - \tan(\varphi) \right)^2 = \frac{1 - \sin(\hat{\varphi})}{1 + \sin(\hat{\varphi})}, \quad T = \frac{1}{\hat{\omega} \cdot \sqrt{\alpha}}, \quad (7.7)$$

wobei $\hat{\omega}$ die Frequenz, bei der den Phasenanstieg geschehen soll, ist und $\hat{\varphi} = \varphi_{\text{neu}} - \varphi$ die (maximale) Phasendifferenz bezeichnet.

Im Allgemeinen geht man (iterativ) wie folgt vor:

1. PI(D) auslegen.
2. Lead-/Lag-Element zuschalten, um die Phasenreserve zu verändern. Die Durchtrittsfrequenz ω_c ändert sich auch.
3. Verstärkung k_p des Regler einstellen, um die Durchtrittsfrequenz anzupassen.

A Mathematik

A.1 Matrizen

A.1.1 Inverse Matrix

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\det(A) \neq 0$ ist inverse Matrix A^{-1} so definiert, dass

$$A \cdot A^{-1} = \mathbb{I}. \quad (\text{A.1})$$

Im Allgemeinen lässt sich die Inverse mit der Formel

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A), \quad \{\text{adj}(A)\}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij}) \quad (\text{A.2})$$

berechnen. Spezialfälle:

- $n = 2$:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

- $n = 3$:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} e \cdot i - f \cdot h & c \cdot h - b \cdot i & b \cdot f - c \cdot e \\ f \cdot g - d \cdot i & a \cdot i - c \cdot g & c \cdot d - a \cdot f \\ d \cdot h - e \cdot g & b \cdot g - a \cdot h & a \cdot e - b \cdot d \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

A.1.2 Eigenwertproblem

Die Eigenwerte einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind die Lösung der Gleichung

$$\det(\lambda \cdot \mathbb{I} - A) = 0. \quad (\text{A.5})$$

Der Eigenraum \mathbf{v}_λ eines Eigenwertes λ ist dann gegeben durch

$$\text{kern}(\lambda \cdot \mathbb{I} - A) \Leftrightarrow (\lambda \cdot \mathbb{I} - A) \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (\text{A.6})$$

A.2 Komplexe Analysis

Für eine komplexe Zahl

$$z = a + j \cdot b = r \cdot (\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)) = r \cdot e^{j \cdot \varphi} \quad (\text{A.7})$$

gilt

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \angle(z) = \varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{für } a > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{für } a < 0 \end{cases}. \quad (\text{A.8})$$

A.2.1 Rechenregel

Für drei komplexe Zahlen z_1, z_2, z_3 sei

$$z = \frac{z_1 \cdot z_2}{z_3}. \quad (\text{A.9})$$

Dann gilt:

$$|z| = \frac{|z_1| \cdot |z_2|}{|z_3|}, \quad \angle(z) = \angle(z_1) + \angle(z_2) - \angle(z_3). \quad (\text{A.10})$$

B Mechanik

B.1 Dynamik und Kräfte

Der Impulssatz (“Linear Momentum Principle”) besagt:

$$m \cdot \ddot{\mathbf{r}}_{\text{OS}} = \sum \mathbf{F}. \quad (\text{B.1})$$

Der Spin-/Drallsatz (“Angular Momentum Principle”) besagt:

$$I_{\text{S}} \cdot \ddot{\theta} + m \cdot \mathbf{r}_{\text{OS}} \times \ddot{\mathbf{r}}_{\text{OS}} = \sum \mathbf{r}_{\text{OP}} \times \mathbf{F}_{\text{P}} + \sum \mathbf{M}, \quad (\text{B.2})$$

$$I_{\text{S}} \cdot \ddot{\theta} = \sum \mathbf{r}_{\text{SP}} \times \mathbf{F}_{\text{P}} + \sum \mathbf{M}. \quad (\text{B.3})$$

Die Federkraft einer Feder mit Federkonstante k ist gegeben durch

$$F = k \cdot x. \quad (\text{B.4})$$

Die Dämpferkraft eines Dämpfers mit Dämpferkonstante d ist gegeben durch

$$F = d \cdot \dot{x}. \quad (\text{B.5})$$

B.2 Arbeit und Leistung

Die Leistung einer Kraft ist:

$$P = F \cdot v. \quad (\text{B.6})$$

Die Leistung einer Drehmoment ist:

$$P = M \cdot \omega. \quad (\text{B.7})$$

Bemerkung. Hier wird es angenommen, dass die Kraft und Geschwindigkeit bzw. Moment und Winkelgeschwindigkeit die gleiche Richtung besitzen.

C MATLAB

C.1 Allgemein

Befehl	Beschreibung
<code>A(i,j)</code>	Eintrag von A in Position <i>i</i> (Zeile) und <i>j</i> (Spalte)
<code>abs(X)</code>	Betrag von allen Einträgen von X
<code>angle(X)</code>	Phase von allen Einträgen von X (in Bogenmass)
<code>X'</code>	Komplex konjugiert und transponiert von X
<code>X.'</code>	Nicht Komplex konjugiert und transponiert von X
<code>conj(X)</code>	Komplex konjugiert von allen Einträge von X
<code>real(X)</code>	Realteil von allen Einträge von X
<code>imag(X)</code>	Imaginärteil von allen Einträge von X
<code>eig(A)</code>	Eigenwerte von A
<code>[V,D]=eig(A)</code>	Eigenwerte D (Diagonaleinträge), Eigenvektoren V (Spaltenvektoren)
<code>s=svd(A)</code>	Singularwerte der Matrix A
<code>[U,Sigma,V]=svd(A)</code>	Singular Values Decomposition der Matrix A
<code>rank(A)</code>	Rang der Matrix A
<code>det(A)</code>	Determinante der Matrix A
<code>inv(A)</code>	Inverse der Matrix A
<code>diag([a1,...,an])</code>	Diagonalmatrix mit a1 , ..., an als Diagonaleinträge
<code>zeros(x,y)</code>	Nullmatrix der Dimension x × y
<code>zeros(x)</code>	Nullmatrix der Dimension x × x
<code>eye(x,y)</code>	Identitätsmatrix der Dimension x × y
<code>eye(x)</code>	Identitätsmatrix der Dimension x × x
<code>ones(x,y)</code>	One-Matrix (alle Einträge = 1) der Dimension x × y
<code>ones(x)</code>	One-Matrix (alle Einträge = 1) der Dimension x × x
<code>max(A)</code>	Grösstes Element im Vektor A (A Matrix: Max in Spaltenvektoren)
<code>min(A)</code>	Kleinstes Element im Vektor A (A Matrix: Max in Spaltenvektoren)
<code>sum(A)</code>	Summe der Elemente von A (A Matrix: Summe Zeile pro Zeile)
<code>dim=size(A)</code>	Dimension der Matrix A (size =[#Zeilen #Spalten])
<code>dim=size(A,a)</code>	a=1 : dim=#Zeilen, a=2 : dim=#Spalten, sonst dim=1
<code>t=a:i:b</code>	t =[a , a+i , a+2i ,..., b-i , b] (Zeilenvektor)
<code>y=linspace(a,b)</code>	Zeilenvektor mit 100 "linear-spaced" Punkte im Intervall [a , b]
<code>y=linspace(a,b,n)</code>	Zeilenvektor mit n "linear-spaced" Punkte im Intervall [a , b]
<code>y=logspace(a,b)</code>	Zeilenvektor mit 50 "logarithmically-spaced" Punkte im Intervall [10^a , 10^b]
<code>y=logspace(a,b,n)</code>	Zeilenvektor mit n "logarithmically-spaced" Punkte im Intervall [10^a , 10^b]
<code>I=find(A)</code>	I : Indizes von den nichtnull Elemente von A
<code>disp(A)</code>	Print on screen von A (String: 'name')

C.2 RT-Befehle

Befehl	Beschreibung
<code>sys=ss(A,B,C,D)</code>	State-Space M. mit A,B,C,D im Zeitbereich
<code>sys=ss(A,B,C,D,Ts)</code>	State-Space M. mit A,B,C,D und Sampling Zeit Ts (zeitdiskret)
<code>sys=zpk(Z,P,K)</code>	State-Space M. mit Nullstellen Z , Pole P und Gain K
<code>sys=zpk(Z,P,K,Ts)</code>	State-Space M. mit Nullstellen Z , Pole P , Gain K und Sampling Zeit Ts
<code>sys=tf([bm ... b0],[an ... a0])</code>	Übertragungsfunktion mit bn in Zähler und an in Nenner
<code>P=tf(sys)</code>	Übertragungsfunktion von sys
<code>P.iodelay=...</code>	Fügt der Funktion P eine Totzeit hinzu.
<code>pole(sys)</code>	Pole eines Systems
<code>zero(sys)</code>	NST eines Systems
<code>[z,p,k]=zpkdata(sys)</code>	z : Nullstellen, p : Pole, k : statische Verstärkung
<code>ctrb(sys)</code> oder <code>ctrb(A,b)</code>	Steuerbarkeitsmatrix
<code>obsv(sys)</code> oder <code>obsv(A,c)</code>	Beobachtbarkeitsmatrix
<code>series(sys1,sys2)</code>	Serieschaltung von sys1 und sys2
<code>feedback(sys1,sys2)</code>	sys1 mit sys2 als (negative) Feedback
<code>[Gm,Pm,Wgm,Wpm]=margin(sys)</code>	Gm : Verstärkungsreserve, Pm : Phasenreserve, Wpm : Durchtrittsfrequenz
<code>[y,t]=step(sys,Tend)</code>	y : Sprungantwort von sys bis T , t : Zeit
<code>[y,t]=impulse(sys,Tend)</code>	y : Impulsantwort von sys bis Tend , t : Zeit
<code>y=lsim(sys,u,t)</code>	Simulation von sys mit dem Input u für die Zeit t
<code>sim('Simulink model',Tend)</code>	Simulation von Simulink Model ' bis Tend
<code>p0=dcgain(sys)</code>	Statische Verstärkung (P (0))
<code>K=lqr(A,B,Q,R)</code>	Verstärkungsmatrix K (Lösung des LQR-Problems)
<code>[X,L,K]=care(A,B,Q)</code>	X : Lösung der Riccati Gleichung, G : Verstärkungsmatrix
<code>Paug=augw(G,W1,W3,W2)</code>	Space State M. für \mathcal{H}_∞
<code>[K,C1,gamma]=hinfsyn(Paug)</code>	\mathcal{H}_∞ : K : Regler
<code>fr=evalfr(sys,f)</code>	sys in f evaluiert (s = f)
<code>sysd=c2d(sys,Ts,method)</code>	Diskretisierung von sys nach method mit Sampling Zeit Ts

C.2.1 Plot und Diagramme

Befehl	Beschreibung
<code>nyquist(sys)</code>	Nyquist-Diagramm des Systems <code>sys</code>
<code>nyquist(sys, {a,b})</code>	Nyquist-Diagramm im Intervall <code>[a,b]</code> des Systems <code>sys</code>
<code>bode(sys)</code>	Bode-Diagramm des Systems <code>sys</code>
<code>bode(sys, {a,b})</code>	Bode-Diagramm im Intervall <code>[a,b]</code> des Systems <code>sys</code>
<code>bodemag(sys)</code>	Bode-Diagramm (nur Betrag) des Systems <code>sys</code>
<code>bodemag(sys, {a,b})</code>	Bode-Diagramm (nur Betrag) im Intervall <code>[a,b]</code> des Systems <code>sys</code>
<code>rlocus(sys)</code>	Wurzelortskurven-Diagramm
<code>impulse(sys)</code>	Impulsantwort des Systems <code>sys</code>
<code>step(sys)</code>	Sprungantwort des Systems <code>sys</code>
<code>pzmap(sys)</code>	Pole-Nullstelle Map des Systems <code>sys</code>
<code>svd(sys)</code>	Singularwertverlauf des Systems <code>sys</code>
<code>plot(X,Y)</code>	Plot von <code>Y</code> als Funktion von <code>X</code>
<code>plot(X,Y,...,Xn,Yn)</code>	Plot von <code>Yn</code> als Funktion von <code>Xn</code> (für alle <code>n</code>)
<code>stem(X,Y)</code>	Diskreter Plot von <code>Y</code> als Funktion von <code>X</code>
<code>stem(X,Y,...,Xn,Yn)</code>	Diskreter Plot von <code>Yn</code> als Funktion von <code>Xn</code> (für alle <code>n</code>)
<code>xlabel('name')</code>	Name der <code>x</code> -Achse
<code>ylabel('name')</code>	Name der <code>y</code> -Achse
<code>title('name')</code>	Titel des Plots
<code>xlim([a b])</code>	Schranke für die <code>x</code> -Achse (Plot zwischen <code>a</code> und <code>b</code>)
<code>ylim([a b])</code>	Schranke für die <code>y</code> -Achse (Plot zwischen <code>a</code> und <code>b</code>)
<code>grid on</code>	Grid
<code>title('name')</code>	Titel des Plots
<code>legend('name1',..., 'namen')</code>	Legende
<code>subplot(m,n,p)</code>	Grid <code>m</code> × <code>n</code> , Plot in Position <code>p</code>
<code>semilogx(X,Y)</code>	Logarithmischer Plot mit <code>y</code> -Achse linear